

RESEARCH MASTER INTERNSHIP

Department of Complex Systems Engineering

Superviser : Emilien Flayac
 Michel Fournié

Location : Toulouse, SUPAERO

Tél. : 05 61 33 81

Mél.: Emilien.FLAYAC@isae-sup Aero.fr

INTERNSHIP DESCRIPTION

Domain : **MATHEMATIQUES APPLIQUEES.**

Title : **CONTROLE OPTIMAL DE L'EQUATION DE LA CHALEUR BIDIMENSIONNEL BASE SUR LA RELAXATION DU MOMENT SOS**

Fields: Control of PDE, optimization with numerical experimentation.

The research will take place within the Applied Mathematics team of the Department of Complex Systems Engineering, (DISC 2) and will benefit from the stimulating environment of ISAE.

The student will be welcomed in a research team composed of 4 permanent staff:

Emilien Flayac, Michel Fournié from ISAE and Didier Henrion, Milan Korda from CNRS-LAAS.

A Ph.D. thesis is planned directly after the internship.

The net salary will be around 550 Euros per month. Speaking French is not compulsory.

Sujet du stage :

Nous considérons le problème de stabilisation d'une EDP vers un état cible à l'aide d'une loi de contrôle. Ce problème se pose typiquement dans le cas du contrôle de l'équation de la chaleur dans un domaine avec seulement un terme de contrôle agissant sur la frontière. L'une des méthodes classiques consiste à utiliser un contrôleur linéaire quadratique (LQ) qui nécessite une discréétisation spatio-temporelle.

Une alternative prometteuse consiste à reformuler le problème du contrôle optimal d'une EDP en un programme linéaire (PL) en dimension infinie en considérant des solutions relaxées appelées mesures d'occupation. La reformulation LP se transforme en une équation sur les moments d'une mesure. Après avoir tronqué jusqu'à un certain degré, on peut reformuler le problème comme une suite de problèmes d'optimisation sur l'espace des matrices semi-définies positives, appelée hiérarchie des moments somme des carrés (SOS en anglais), qui peut être résolue numériquement pour une taille modérée de matrices. Un contrôleur polynomial peut ensuite être récupéré à partir des moments de la solution. La caractéristique importante de cette méthode est qu'elle ne repose pas sur un maillage spatio-temporel. La reformulation LP a été appliquée avec succès au problème de synthèse de contrôleur d'EDP dans [1]-[4], mais seulement pour des EDP 1D en espace.

L'objectif de ce stage est de concevoir un contrôleur stabilisateur via l'approche SOS des moments pour l'équation de la chaleur en 2D.

Ce travail pourrait être utilisé comme point de départ d'une thèse axée sur le contrôle des équations de Navier-Stokes non linéaires.

Research activities

We consider the problem of stabilization of a PDE towards a target state using a feedback control law. This typically arises in the problem of controlling the heat equation in a domain with only a control term acting on the boundary. One of the classical methods consists of using the well-known linear quadratic controller which nevertheless requires space-time discretization.

A promising alternative is to recast the problem of optimal control of a PDE into a linear program (LP) in infinite dimension by considering relaxed solutions called occupation measures. The LP reformulation transforms into an equation on the moments of a measure. After truncating up to a certain degree, one can reformulate the problem as a sequence of optimization problems on the space of positive semidefinite matrices, called a moment sum of square (SOS) hierarchy, which can be solved numerically for a moderate size of matrices. A polynomial feedback controller can then be retrieved from the moments of the solution. The distinguishing and important feature is that the moment-SOS approach does not rely on spatio-temporal gridding. The LP reformulation has been successfully applied to the PDE controller synthesis problem in [1]-[4] but only for PDEs in 1D space.

The goal of this internship is to design a stabilizing controller via the moment SOS approach for the 2D heat equation.

This work could be used as a starting point of a PhD thesis focused on the control of the nonlinear Navier-Stokes equations.

References :

- [1] Korda, M., Henrion, D., & Lasserre, J. B. (2022). Moments and convex optimization for analysis and control of nonlinear PDEs. In *Handbook of Numerical Analysis* (Vol. 23, pp. 339-366). Elsevier.
- [2] Henrion, D., & Lasserre, J. B. (2022). Graph recovery from incomplete moment information. *Constructive Approximation*, 56(1), 165-187.
- [3] Magron, V., & Prieur, C. (2020). Optimal control of linear PDEs using occupation measures and SDP relaxations. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 37(1), 159-174.
- [4] Lamare, P. O., Girard, A., & Prieur, C. (2016). An optimisation approach for stability analysis and controller synthesis of linear hyperbolic systems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 22(4), 1236-1263.

Application: please send us by email a curriculum vitae.

Application deadline: February 16th, 2023

Location: ISAE 1, Campus SUPAERO (Toulouse, France); Duration: 5 months, starting March or April, 2023

100 % Theoretical Research	100 % Applied Research	100 % Experimental Research
----------------------------	------------------------	-----------------------------

Possibility to go on a Ph.D.: Yes No

APPLICANT PROFILE

Knowledge and required level:

Applications should be sent by e-mail to the supervisor.